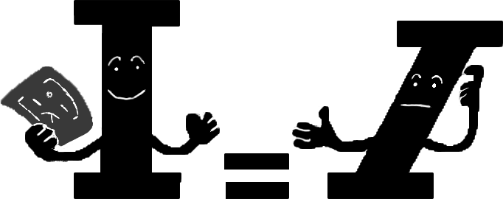
به نام خدا



پاسخ تمرین دوم

جبر خطی کاربردی – پاییز 1400

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

1- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) اگر و باشد آنگاه بخش های ، می توانند ضرب بلوکی شوند.

ب) در تجزیه ی یک ماتریس مانند برای به دست آوردن ماتریس کافیست ماتریس را به فرم نردبانی کاهش یافته تبدیل کنیم.

پ) اگر یک ماتریس باشد که عنصر داشته باشد، آنگاه ماتریس وارون پذیر نیست.

ت) اگر بتوان را به فرم ماتریس همانی کاهش داد، آنگاه فضای ستونی یک پایه برای است.

*ج)* اگر و وارون پذیر باشند، آنگاه نیز وارون پذیر خواهد بود.

چ) اگر و وارون پذیر باشند، آنگاه .

ه) فضای پوچ ماتریس یک زیرفضا از است.

**پاسخ**:

*الف) غلط.*

*(راه اول): آوردن مثال نقض*

*(راه دوم): زیرا برای اینکه منطبق باشند باید تقسیم بندی ستونی A و تقسیم بندی سطری B باید هماهنگ باشد. (پاراگراف قبل از EXAMPLE 3 صفحه 120 کتاب درسی)*

*ب) غلطٍ. باید ماتریس A را اگر ممکن بود با استفاده از عملیات های row replacement به فرم تبدیل کنیم.*

*پ) درست. طبق تئوری 8 کتاب درسی می دانیم برای اینکه یک ماتریس وارون پذیر باشد، باید دقیقا عنصر داشته باشد.*

*ت) درست. در اینصورت طبق تئوری 8 کتاب درسی این ماتریس، یک ماتریس معکوس پذیر است و دوباره طبق همین تئوری می دانیم که ستون های هرماتریس معکوس پذیر را اسپن می کنند. پس طبق تعریف پایه، این مجموعه یک پایه برای خواهد بود.*

*ج) غلط. مثال نقض در اینصورت ، که وارون پذیر نیست.*

*چ) غلط. مثال نقض:*

*ه) غلط.ٍ طبق تئوری 12 کتاب درسی میدانیم که اگر یک ماتریس باشد آنگاه فضای پوچ آن زیرفضایی از خواهد بود.*

2- *همه مقادیر را طوری بیابید که ماتریس وارون پذیر باشد. سپس به ازای ، را بدست آورید.*

***پاسخ****:*

* با اجرای مراحل حذف گاوس- جوردن خواهیم داشت:

در این مرحله توقف میکنیم. برای اینکه ماتریس A وارون پذیر باشد باید:

* حال جواب قسمت اول بدست آمده است. با فرض c = 1 به حل ادامه میدهیم تا وارون بدست آید.

داریم:

بنابراین معکوس A بدست آمد:

*3- فرض کنید و درایه های روی قطر اصلی برابر صفر است.*

*ثابت کنید .*

***پاسخ****:*

* در ماتریس درایه روی قطر اصلی در سطر i برابر است با:

* چون میدانیم که سطر i ماتریس ترانهاده برابر با ستون i ماتریس اصلی است؛ پس درایه روی قطر اصلی سطرi برابر با مجموع مربعات درایه های ستون i ماتریسA است که برابر 0 است.

+ + ... +

چون مجموع جملات برابر 0 است و هرجمله بزرگتر مساوی صفر است؛ پس تمام جملات صفر است؛ پس تمام درایه های ماتریس A برابر صفر است. در نتیجه: A = 0

*4- فرض کنید ماتریس است و .*

*الف) نشان دهید ماتریس وارون پذیر است اگر و تنها اگر .*

*ب) نشان دهید که ماتریس وارون پذیر است.*

***پاسخ****:*

1. الف)

* اگر آنگاه - و حال از آن جایی که میتوان را به (A - تجزیه کرد، و از آنجایی که :

اگر (A - وارون پذیر باشد،

و از آنجایی که وارون ماتریس یکتاست،

ماتریس باید وجود داشته باشد.

ب)

* با توجه به قسمت الف میتوان نتیجه گرفت که هرکدام از ماتریس های A و A + 2I و A- I وارون پذیرند؛ درنتیجه ضرب آنها نیز وارون پذیر است.

*5-* فرض کنید ماتریس یک ماتریس وارون پذیر باشد و همچنین ماتریس های و ، ماتریس هایی مربعی باشند.

الف) ثابت کنید ماتریس های وارون پذیرند و سپس وارون ماتریس را برحسب وارون های نشان دهید. ( راهنمایی: را که برابر است می توان به صورت نوشت. )

ب) وارون ماتریس را با استفاده از رابطه ی وارون بدست آمده در روش الف به دست بیاورید.

***پاسخ****:*

الف)

* ابتدا سعی می کنیم درایه های وارون ماتریس A را به دست آوریم :

بنابراین چون XB=I و طبق فرض X مربعی است می توان نتیجه گرفت X وارون پذیر است و .

به همین صورت چون YT=I و طبق فرضY مربعی است می توان نتیجه گرفتY وارون پذیر است و

اکنون C و Z را به دست می آوریم:

بنابراین وارون ماتریس A می شود:

ب)

* ماتریس را به شکل زیر بخش بندی می کنیم:

اکنون طبق الف می دانیم که معکوس B می شود:

پس کافیست معکوس X و Y را به دست آوریم و جایگذاری کنیم:

بنابراین وارون ماتریس B می شود:

*6-* ماتریس های و را در نظر بگیرید.

الف) تجزیه ی ماتریس را به دست آورید.

ب) با استفاده از تجزیه ی به دست آمده در بخش الف، دستگاه را حل کنید.

***پاسخ****:*

الف)

* ابتدا U را به دست می آوریم:

اکنون L را به دست می آوریم:

÷1

÷ -2

÷1

÷3

ب)

- می دانیم که و . ابتدا را حل می کنیم:

اکنون را حل می کنیم:

بنابراین می شود :

*7-* بررسی کنید کدام یک از زیر مجموعه های زیر یک زیرفضا () از هستند. (اثبات)

الف)

ب)

ج)

د)

**پاسخ**:

الف) زیر فضا نیست چون 0 جز جواب تساوی 2x + y – 3z = 7 نیست.

ب) تحت ضرب و جمع بسته است و 0 نیز جز جواب های آن است زیر فضا هست.

ج) بردار صفر را شامل نمیشود در نتیجه زیرفضا نیست.

د) زیر فضا هست. طبق تساوی ها داریم: A = بطوریکه Ax = 0

با حل تساوی بالا داریمz x = به ازای هر در نتیجه این مجموعه} span { است و از انجایی که هر span ای زیر فضاست، این زیر مجموعه یک زیرفضا برای است.

*8-* با توجه به ماتریس زیر به سوالات زیر پاسخ دهید.

A =

الف) یک پایه برای این ماتریس بیابید.

ب) یک پایه برای این ماتریس بیابید.

ج) اگر نشان دهید در فضای ستونی ماتریس قرار دارد.

د) آیا در ماتریس قرار دارد؟ توضیح دهید.

**پاسخ**:

الف) فرم کاهش یافته A را بدست میاوریم:

A = با توجه به اینکه در ستون های یک و دو pivot position داریم. ستون های یک و دو ماتریس اولیه پایه های فضای ستونی را تشکیل میدهند.

ب) با حل این تساوی داریم:

فرم کاهش یافته:

در نتیجه:

ج)

[A p ] ~

* معادله ی Ax = p جواب دارد در نتیجه p در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد.

د) خیر چون نیست.

9- فرض کنید یک ماتریس باشد. اگر داشته باشیم ، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) را بدست آورید.

ب) را بدست آورید.

***پاسخ****:*

الف)

ب) ترانهاده جای ستون ها و ردیف ها را عوض میکند در نتیجه:

اگرB = :

از طرفی طبق rank theorem rank:

در نتیجه:

*10-* پایه و بردار را مطابق زیر در نظر بگیرید.

مختصات نقطه ای نسبت به پایه را بدست آورید.

**پاسخ:**

* برای بدست آوردن این ضرایب کافی است تا دستگاه زیر را حل کنیم. داریم:

در نتیجه:

11- (امتیازی) فرض کنید عدد طبیعی است. وارون ماتریس را بیابید.

**پاسخ**:

با توجه به صورت سوال داریم:

حال میدانیم اگر را ستون iام ماتریس وارون باشد، در نتیجه:

پس برای از1 تا معادله بالا را حل کرده و ستون های ماتریس وارون به دست آمده و ماتریس وارون بدست میاید.

برای داریم:

حال اگر معادله بالا را از عبارت پایین شروع به حل کنیم، بدست میاید:

پس ستون اول ماتریس وارون بدست میاید:

برای ستون دوم داریم:

اگر دوباره مانند قسمت قبل محاسبات را از عبارت پایین انجام دهیم به عبارت زیر میرسیم:

که بدست میاید پس خواهیم داشت:

برای ستون های سه به بعد داریم:

پس مانند قسمت های قبل:

چون عبارت برابر 0 است و عبارت تا همگی برابر صفر است؛ در نتیجه عبارت تا همگی برابر صفر هستند. پس برای ستون ام داریم:

*پس ماتریس وارون بدست میاید:*

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی پاییز 1400